Cap. 3. Momento (linear) e momento angular.

Começamos aqui a descrever as leis de conservação da mecânica (momentos linear e angular, e energia). Elas estão intimamente relacionadas e são vistas como os pilares de sustentação de toda a física moderna. Curiosamente, na mecânica clássica as 2 primeiras são muito diferentes da última (energia), cuja demonstração é surpreendentemente sutil.

3.1 Conservação do momento linear

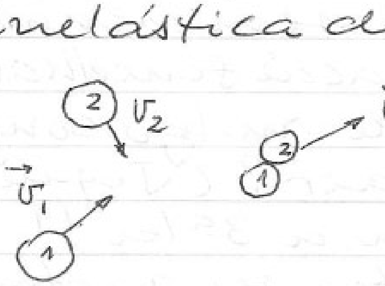
Já vimos no cap. 1: se as forças internas a um sistema de N partículas obedecem à 3ª lei, então

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} \qquad \left(\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha\right)$$

$$\Downarrow$$

Princípio da conservação do momento (linear): Se $\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow$ o momento mecânico total do sistema $\vec{P} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$ é conservado (é constante)

Exemplo (simples e bem conhecido): colisão inelástica de 2 corpos



Se $\vec{F}^{ext} = 0$ (ou pode ser desprezada durante o curto intervalo de tempo ~~em~~ que dura a colisão),

$$\vec{P}_{in} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}_{fin} = m_1\vec{v} + m_2\vec{v} = (m_1+m_2)\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$ (média ponderada das velocidades)

Se $\vec{v}_2 = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1$

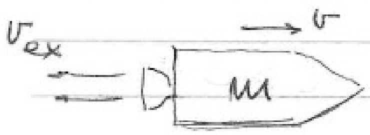
(usado em perícia policial de acidentes de carro - $\vec{v}$ pode ser determinada pelas marcas de pneu)

Este tipo de análise - usando a conservação do momento - é ferramenta importante na solução de muitos problemas, desde reações nucleares até batidas de carro e colisões de galáxias.

3.2 Foguetes

Um bonito exemplo do uso da conservação do momento é a análise da propulsão de foguetes. O problema básico do engenho é: como fazê-lo se mover (acelerar) sem nenhum agente externo? Situação semelhante: ponha-se no meio de um lago congelado sem atrito: como sair? (Jogue fora as botas!) - usando a 3ª lei!! É o que faz um foguete: seu motor é projetado para atirar fora combustível pela parte de trás com a maior velocidade possível, e acelerar para a frente graças à 3ª lei.

Para a análise quantitativa devemos examinar o momento total.



v_{ex} (>0) : velocidade de exaustão (ejeção) dos gases em relação ao foguete.

Como o foguete ejeta massa, sua massa decresce com o tempo. Em t:

$$P(t) = mv \quad ; \text{ em } t+dt$$

$$p_{foguete}(t+dt) = (m+dm)(v+dv)$$

$(dm<0)$

O combustível ejetado neste intervalo tem massa $(-dm)$ (positiva!) e velocidade $v - v_{ex}$ em relação ao chão; portanto,

$$P(t+dt) = (m+dm)(v+dv) + (-dm).(v-v_{ex})$$

$$= mv + m\,dv + dm\,v_{ex} + \cancel{dm\,dv}$$

Logo,

$$dP = P(t+dt) - P(t) = m\,dv + dm\,v_{ex}$$

Se $F^{ext} \neq 0$,

$$dP = F^{ext}\,dt \qquad (g, \text{ por exemplo})$$

Se $F^{ext} = 0$, $dP = 0$, e

$$m\,dv = -dm\,v_{ex}$$

$$\Downarrow$$

$$m\frac{dv}{dt} = m\dot{v} = -\dot{m}\,v_{ex} = -\frac{dm}{dt}\,v_{ex}$$

onde $-\dot{m}$ (>0!) é a taxa com que o motor do foguete ejeta massa. O termo $-\dot{m} v_{ex}$ desempenha o papel da força na 2ª lei, e é comumente chamado de empuxo (não confunda com aquele envolvido no princípio de Arquimedes):

$$\text{empuxo} = -\dot{m} v_{ex} \qquad (>0)$$

A eq. que resulta pode ser resolvida por separação de variáveis:

$$dv = -v_{ex} \frac{dm}{m}$$, e, se v_{ex} é constante,

$$\cancel{v(t)} \quad v - v_0 = v_{ex} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

(v_0: velocidade inicial, e m_0 massa inicial do foguete ~~~~- incluindo o combustível!) Este resultado impõe uma restrição severa à velocidade máxima de um foguete. A razão $\frac{m_0}{m}$ é máxima quando todo o combustível tiver sido consumido e m for apenas a massa do foguete (carcaça) e sua carga. Mesmo que, por exemplo, a massa original seja 90% combustível, esta razão é apenas 10, e a velocidade máxima ganha ($v - v_0$) não pode ser maior que $2{,}3 v_{ex}$ ($\ln 10 = 2{,}3$). Por isso os engenheiros buscam v_{ex} máximo e foguetes com múltiplos estágios.

3.3 Centro de massa

Seja um sistema de N partículas, $\alpha = 1, ..., N$, com massas m_α e posições $\vec{r}_\alpha$ relativas à origem O. O centro de massa (CM) do sistema é definido como a posição ("fantasma")

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \qquad \left(M = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\right)$$

Esta é uma equação vetorial; em componentes cartesianas, ela é equivalente às 3 escalares

$$X = \frac{1}{M} \sum m_\alpha x_\alpha, \quad Y = \frac{1}{M} \sum m_\alpha y_\alpha, \quad Z = \frac{1}{M} \sum m_\alpha z_\alpha$$

A posição do CM é a média, ponderada pelas massas m_α, dos $\vec{r}_\alpha$.

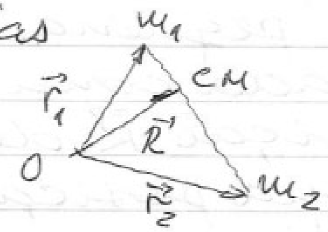
Sua velocidade é

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$$

Sistema de 2 partículas:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

- o CM está no segmento de reta que une as 2 partículas



- as distâncias entre as partículas 1 e 2 e o CM estão na razão $\frac{m_2}{m_1}$

=> CM está + próximo da partícula de maior massa. Se $m_1 \gg m_2$, $\vec{R} \simeq \vec{r}_1$

Para N partículas, se $m_1 >> m_\alpha$ $(\alpha = 2, ..., N)$
e $m_1 \simeq M$, $\vec{R} \simeq \vec{r}_1$
(o CM do sistema solar fica muito próximo do Sol)

Podemos escrever o momento total de um sistema de N partículas em termos da velocidade do CM:

$$\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M\dot{\vec{R}}$$

$\Rightarrow$ o momento total é o de uma partícula de massa M e velocidade igual a do CM.

Melhor ainda:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} = M\ddot{\vec{R}} \Rightarrow \text{o CM } \vec{R}$$

se move como se fosse partícula de massa M sujeita à resultante das forças externas que agem sobre o sistema. É este resultado que nos permite muitas vezes tratar objetos extensos como se fossem partículas: se a extensão do objeto é pequena na escala de (comparada com) sua trajetória, a posição $\vec{R}$ de seu CM representa bem sua posição, e a eq. acima implica em que $\vec{R}$ se mova como um ponto material.

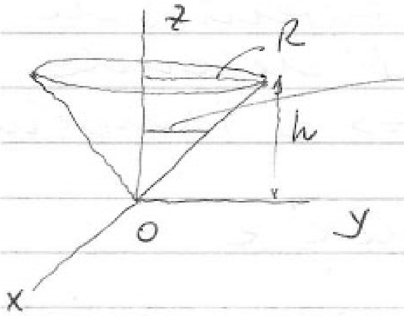
Quando a massa de um objeto tem distribuição contínua (e não granulada),

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm = \frac{1}{M}\int \rho\,\vec{r}\,dV$$

↳ densidade.

(integral sobre o volume ocupado pelo objeto, região onde $\rho \neq 0$).

Exemplo: CM de cone sólido uniforme



$r = \frac{Rz}{h}$

Por simetria, $\vec{R} \propto \hat{z}$: componente x → contribuição do ponto $(-x, y, z)$ é cancelada pela do ponto (x, y, z)

$$Z = \frac{1}{M}\int \rho\, z\, dV = \frac{\rho}{M}\int z\, dx\, dy\, dz$$

Para um z fixo, a integral em $dx\,dy$ é sôbre círculo de raio $r = \frac{Rz}{h}$, dando fator $\pi r^2 = \frac{\pi R^2}{h^2} z^2$;

$$Z = \frac{\rho \pi R^2}{M h^2}\int_0^h z\, z^2\, dz = \frac{\rho \pi R^2}{M h^2} \cdot \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{3}{4} h$$

(já que $M = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h$)

3.4 Momento angular de uma partícula

Sua conservação exibe um claro paralelo com a do momento linear. Vamos rever o formalismo, primeiro para uma partícula, depois para um sistema de partículas.

O momento angular de 1 partícula é o vetor $\vec{\ell}$ definido por

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(medido em relação à origem O de 1 sistema de coordenadas). Como $\vec{r}$ depende da origem escolhida $\Rightarrow$ $\vec{\ell}$ também.

A taxa de variação de $\vec{\ell}$ é:

$$\dot{\vec{\ell}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_{=0 \text{ (porque?)}} + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}})$$

$\Rightarrow \dot{\vec{\ell}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$: o torque (relativo à mesma origem O) sobre a partícula. É o análogo rotacional de $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, muitas vezes apontado como a forma rotacional da 2ª lei

Em muitos problemas de 1 partícula é possível escolher-se O (a origem) de modo que o torque resultante em relação a ela seja nulo. Neste caso, $\dot{\vec{\ell}} = 0 \Rightarrow \vec{\ell}$ é constante.

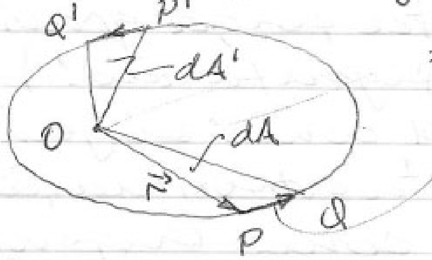
Exemplo: modelo de partícula aplicado ao movimento de um planeta (ou cometa), ignorando-se as interações gravitacionais outras que não a com o sol. Como esta força gravitacional é central (significado?), $\vec{F}$ é paralelo a $\vec{r}$ (sol como origem) e $\vec{\tau}=0$. Portanto, nesta aproximação, se escolhermos o sol como origem $\vec{\ell}$ é constante, o que simplifica muito a análise do movimento planetário. Por exemplo: como $\vec{\ell}$ é perpendicular ao plano da órbita (porque $\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}$) e é constante, a órbita planetária fica confinada a um único plano que contém o sol, e o problema se torna bi-dimensional.

— 25/03/09 —

2ª lei de Kepler : um dos primeiros triunfos da mecânica newtoniana foi a explicação que deu a esta lei como uma consequência direta da conservação do momento angular.

As Leis de Kepler são leis fenomenológicas, descrições matemáticas sintéticas dos movimentos planetários observados, e não tentam explicar estes movimentos em termos de idéias + fundamentais. Mas elas podem ser explicadas como consequências das leis de Newton.

Seu enunciado: a linha que liga o sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

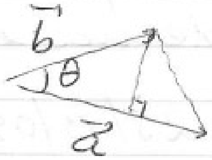


$\to$ sol (suposto fixo - não é necessário, veremos + tarde)

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

Isto é: se $dt = dt' \Rightarrow dA = dA'$; ou $\frac{dA}{dt}$ é constante.

Propriedade do produto vetorial: se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 2 lados de um triângulo, sua área é $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ $\left(= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\theta\right)$



Logo, $dA = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}\,dt| =$

$$= \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{p}|\frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r}\times\vec{p}| = \frac{1}{2m}|\vec{\ell}| = \frac{\ell}{2m}$$

$$(\ell = |\vec{\ell}|)$$

Como $\vec{\ell}$ é constante, ℓ e $\frac{dA}{dt}$ também o são $\Rightarrow$ 2ª lei de Kepler.

Uma outra demonstração deste mesmo resultado nos dá informação adicional: em problema da lista você mostrará que $\ell = mr^2\omega$ e que $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega$ $\Rightarrow$ ℓ é constante se e somente se $\frac{dA}{dt}$ também o for. Além disso, vemos que quando um planeta se aproxima do sol (r decresce), $\omega (= \dot{\phi})$ tem que aumentar $(\omega \propto \frac{1}{r^2})$

A 2ª lei de Kepler é, portanto, verdadeira para qualquer objeto (partícula) que se mova sob a ação única de uma força central (qualquer!). Já as outras 2 dependem da forma funcional explícita da força gravitacional $(\propto \frac{1}{r^2})$ e não são verdadeiras para ~~esta~~ forças com dependência em r diferente desta.

3.5 Momento angular de sistema de partículas

Considere sistema formado por N partículas, $\alpha = 1, 2, ..., N$, com todos os $\vec{r}_\alpha$ referidos à mesma origem O de um referencial inercial. Definimos o momento angular total do sistema $\vec{L}$ por

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{\ell}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$$

Sua taxa de variação é

$$\dot{\vec{L}} = \sum_\alpha \dot{\vec{\ell}}_\alpha = \underbrace{\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha}_{\text{torque resultante sobre o sistema}}$$

(força resultante sobre a partícula α)

Mas posso separar $\vec{F}_\alpha$ em

$$\vec{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_\alpha^{ext}$$

$\vec{F}_{\alpha\beta}$: força que β faz em α

Então, $\dot{\vec{L}} = \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext}$

$$= \sum_\alpha \sum_{\beta>\alpha} (\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_\beta \times \vec{F}_{\beta\alpha}) + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext}$$

$$= \sum_\alpha \sum_{\beta>\alpha} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext}$$

(já que $\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}$, 3ª lei)

Se as forças internas forem centrais (ou: se a 3ª lei é válida na forma <u>forte</u>), então $\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta$ é paralelo a $\vec{F}_{\alpha\beta}$ e ~~a [illegible]~~ o 1º termo é nulo

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext} = \vec{\Sigma}^{ext}$$

(torque externo resultante)

Portanto,

Se o torque externo resultante sobre um sistema de (N) partículas é nulo, seu momento angular total $\vec{L} = \sum \vec{\ell}_\alpha = \sum \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$ é conservado (é constante).

Este é o princípio da conservação do momento angular (pressuposto: forças internas obedecem à 3ª lei na forma <u>forte</u> - isto é, são centrais)

Momento de inércia: Antes de mostrar exemplos, vale notar que nem sempre precisamos calcular o momento angular total através de sua definição

Para um corpo rígido rodando em torno de um eixo fixo, por exemplo, o 'atalho' é exprimir aquela soma complicada em termos do momento de inércia e da velocidade angular de rotação. Se tomamos o eixo de rotação como o eixo z, L_z (a componente z de $\vec{L}$) é igual a $I\omega$, onde I é o momento de inércia do corpo em relação àquele eixo e ω é a velocidade angular de rotação (veja problema da lista 4)

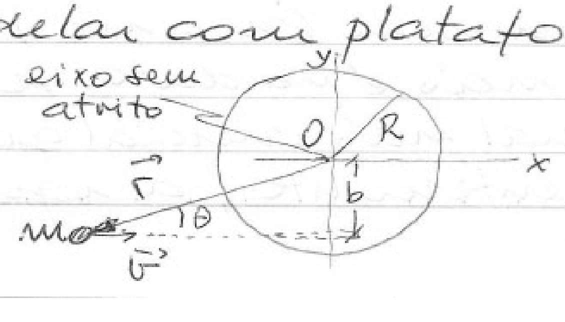
Momentos de inércia de objetos simples:
- disco uniforme girando em torno de seu eixo : $\frac{1}{2} MR^2$
- esfera uniforme (sólida), girando em torno de um diâmetro : $\frac{2}{5} MR^2$

O caso geral, para qualquer sistema de (N) partículas, é

$$I = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \rho_\alpha^2$$

(ρ_α: distância perpendicular da partícula α ao eixo de rotação)

Exemplo: colisão de bola de massa de modelar com plataforma giratória



M: massa da plataforma
b: parâmetro de impacto

Encontrar ω do conjunto depois da colisão.

Como não há atrito no eixo de rotação, $\tau_z^{ext} = 0$ sobre o sistema ($m\vec{g} \parallel \hat{z}$)

$$\Downarrow$$

L_z é conservado

No início, só a massa de modelar contribui $\ell_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z$;

$$\Downarrow$$

$$L_z^{ini} = \ell_z = r\,(mv)\,\mathrm{sen}\,\theta = mvb$$

Depois da colisão, formam um "aglomerado" rígido, e $I = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2$

$$\Downarrow$$

$$L_z^{fin} = I\omega = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega \quad , \text{ e}$$

$$mvb = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{m}{m + \frac{M}{2}} \cdot \frac{vb}{R^2}$$

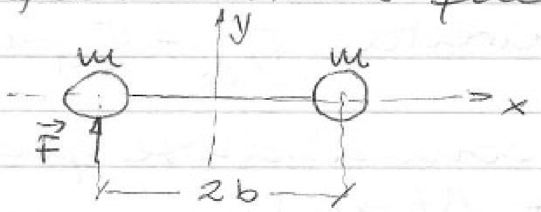
O interessante é que obtivemos a solução com pouquíssimo esforço! Isto é típico de situações onde podemos aplicar leis de conservação.

Momento angular em relação ao CM:

$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}_{ext}$ foi demonstrada na hipótese de que todas as quantidades eram medidas em um (mesmo) referencial inercial, e não é verdade se usamos um referencial não inercial qualquer. Surpreendentemente, a igualdaou girando

de acima é válida se a origem for o CM do sistema, mesmo que ele esteja acelerado em relação a um referencial inercial! (demonstração virá + tarde).

Exemplo: halteres que escorrega e gira



$\vec{F}$ "dura" Δt.
(pequeno)
(força impulsiva)

Descrever o movimento subsequente.

Parte 1: movimento inicial, imediatamente depois do impulso

$$\text{o CM:} \quad \dot{\vec{P}} = \underbrace{\vec{F}}_{} \Rightarrow \quad \Delta\vec{P} = \vec{P} = \underbrace{\vec{F}.\Delta t}_{\text{impulso}} = (2m)\dot{\vec{R}}$$

$\vec{F}^{ext} = \vec{F}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{R}} \text{ (do CM)} = \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{F}.\Delta t}{2m}$$

Enquanto $\vec{F}$ atua: $\vec{\tau}^{ext} = \vec{r} \times \vec{F}$ e, em relação ao CM, $\vec{\tau}^{ext} = -Fb\,\hat{z}$, e

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{fim} = \underbrace{\vec{\tau}.\Delta t}_{\text{impulso angular}} = -Fb\Delta t\,\hat{z}, \text{ e}$$

$$Fb\Delta t = I\omega = 2mb^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{F\Delta t}{2mb},$$

girando no sentido antitrigonométrico ($\vec{\omega} = -\frac{F\Delta t}{2mb}\hat{z}$)

Massa da esquerda: move-se, em

relação ao CM, com velocidade ωb no sentido $+y$, e sua velocidade (em relação ao laboratório) é

$$v_{esq} = v_{CM} + \omega b = \frac{F\Delta t}{2m} + \frac{F\Delta t}{2mb} \cdot b$$
$$= \frac{F\Delta t}{m}$$

A massa da direita: $v_{dir} = v_{CM} - \omega b = 0$

(consistência com análise qualitativa no limite $\Delta t \to 0$)

Parte 2: movimento subsequente

Depois de decorrido Δt, $\vec{F}^{ext} = \vec{\tau}^{ext} = 0$

$\Downarrow$

CM se move no sentido $+y$ com v_{CM} constante (cons. mom. linear);

halteres continua girando com ω constante em relação ao CM (cons. mom. angular).

Velocidade da massa m quando halteres $\parallel \hat{y}$ no laboratório?